Endomorphismes symétriques.

Here lies the ultimate weapon!

Def → $u \in \mathcal{L}(E)$ symétrique ($\mathcal{S}(E)$) $\iff \forall x, y \in E^2$

$$\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$$

→ S'équivalent

- u symétrique
- $\exists (e)$ BON tq $[u]_{(e)} \in S_n(\mathbb{R})$
- $\forall (e)$ BON tq $[u]_{(e)} \in S_n(\mathbb{R})$

→ Théorème spectral → The ultimate weapon!

Si $u \in \mathcal{S}(E)$ alors :

- * F stable par $u \iff F^{\perp}$ l'est
- * $\forall \lambda, \mu$ v.p $E_{\lambda, u} \perp E_{\mu, u}$
- * $E = \overset{\perp}{\bigoplus}_{\lambda \in \mathrm{spec}_{\mathbb{R}}(u)} E_{\lambda, u}$
- * u est DZ en BON → cheat!

(preuve : rec sur la dim) → Lemme du [illegible] stable

Si $A = [u]_{(e)}$ (BON) : $\exists O \in O_n(\mathbb{R})$, Δ diago

$$A = O \Delta {}^t O$$

$\rightarrow$ Notice $\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}^2 = \mathrm{Tr}({}^tAA)$

$$= \mathrm{Tr}(A^2) = \mathrm{Tr}(\Delta^2) = \sum_{\lambda \text{ vp.}} \lambda^2$$

$\rightarrow$ (e_i) BON, spec $u = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$

* $\left\langle u\left(\sum_{i=1}^{n} s_i e_i\right), \sum_{j=1}^{n} t_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i t_i$

* $\min_{\|x\|_2=1} \langle u(x), x\rangle = \lambda_1$ | $\max_{\|x\|_2=1} \langle u(x), x\rangle = \lambda_n$

+1 classique à la fin.